7.

Beweis der Gleichung $0^0 = 1$, nach J. F. Pfaff.

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor in Leipzig.)

Von dieser Gleichung theilte mir mein unvergefslicher Lehrer und Freund, der verst. Hofrath Pfaff in Halle, im Jahre 1814 einen Beweis mit, der an Bündigkeit nichts zu wünschen übrig lassen möchte, und den ich hier zur Beseitigung der im XI. Bande dieses Journals, Seite 272, gegen die allgemeine Zulässigkeit der Gleichung erhobenen Zweifel bekannt zu machen mir erlaube.

Die Gleichung $0^0 = 1$ will nichts Anderes sagen, als dafs der Werth von x^x bei fortwährender Abnahme von x sich der Einheit über jede angebbare Grenze nähert. Man setze $x = \frac{1}{u}$, so wird $x^x = \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$, und es kommt alsdann darauf an, zu zeigen, dafs $u^{\frac{1}{u}}$ der Einheit so nahe gebracht werden kann, als man will, wenn man u ohne Ende wachsen läfst. Hierzu sind folgende zwei Sätze vorauszuschicken.

I. Wenn z positiv und $m > 1$ ist, so ist immer

$$(1+z)^m > 1 + (m-1)z.$$

Beweis. Sei zuerst m ein unächter Bruch $= R + r$, wo R die vor m nächst kleinere positive ganze Zahl und r ein unächter Bruch ist. Alsdann folgt aus dem binomischen Lehrsatze $(1+z)^R > 1 + Rz$, weil alle folgenden Glieder der Entwickelung positiv sind. Um so viel mehr ist daher $(1+z)^{R+r} > 1 + Rz > 1 + (R+r-1)z$, oder, wenn wir für $R+r$ wieder m setzen: $(1+z)^m > 1 + (m-1)z$.

Hieraus folgt von selbst, dafs der Satz auch dann gilt, wenn m eine ganze Zahl ist.

II. Ist m eine ganze Zahl > 4, so ist

$$2^m > m^2.$$

Beweis. Weil $m > 4$, so hat man $m(m-2) > 1$, d. i. $m^2 > 2m + 1$, folglich auch $2m^2 > (m+1)^2$. Angenommen ferner, dafs $2^m > m^2$, so ist auch $2^{m+1} > 2m^2$, also wegen des vorigen um so mehr $2^{m+1} > (m+1)^2$. Gilt daher der zu erweisende Satz für m, so gilt er auch für $m+1$. Er ist aber für $m = 5$ richtig, folglich u. s. w.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir zunächst zwei Grenzen bestimmen, zwischen denen $u^{\frac{1}{u}}$ für $u>1$ gewifs eingeschlossen ist. Es bedarf keines besondern Beweises, dafs für $u>1$, $u^{\frac{1}{u}}>1$. Man setze daher $u^{\frac{1}{u}}=1+z$, so ist $u=(1+z)^u>1+(u-1)z$ nach I., folglich

$$u-1>(u-1)z,\quad 1>z,\quad u^{\frac{1}{u}}<2.$$

Mithin ist $u^{\frac{1}{u}}$ zwischen den Grenzen 1 und 2 begriffen.

Um nunmehr den Grenzwerth von $u^{\frac{1}{u}}$, wenn u über alle Grenzen wächst, zu erforschen, oder, was dasselbe ist, um den Grenzwerth von $U=(2^m u)^{\frac{1}{2^m u}}$ zu bestimmen, wenn u einen endlichen constanten positiven Werth hat, m aber ohne Ende zunimmt, machen wir folgende Schlüsse. Es ist

$$U=\sqrt[\frac{2^m u}{m}]{2}\,.\,\sqrt[2^m]{u^{\frac{1}{u}}}.$$

Da nun nach II., wenn m bereits 4 überschritten hat, $\frac{2^m u}{m}>mu$ ist, so folgt:

$$\sqrt[\frac{2^m u}{m}]{2}<\sqrt[mu]{2}.$$

Da ferner, wie vorhin bewiesen worden, $u^{\frac{1}{u}}<2$, so ist auch

$$\sqrt[2^m]{u^{\frac{1}{u}}}<\sqrt[2^m]{2}<\sqrt[m]{2};$$

folglich

$$U<\sqrt[mu]{2}\,.\,\sqrt[m]{2}=2^{\left(\frac{1}{u}+1\right)\frac{1}{m}}=y^{\frac{1}{m}},$$

wenn wir $2^{\frac{1}{u}+1}=y$ setzen. Ist aber, wie angenommen wurde, u endlich und positiv, so ist auch y endlich und >1, folglich $y^{\frac{1}{m}}$ eine Gröfse, die gröfser als 1, und die, je mehr m zunimmt, sich desto mehr der Einheit, und zwar über alle Grenzen, nähert. Da nun $U<y^{\frac{1}{m}}$ und zugleich >1, so mufs um so mehr U bei wachsendem m der Einheit über jede angebbare Grenze nahe kommen.

So weit nach **Pfaff**. Ich bemerke nun noch, dafs es mit dem jetzt Erwiesenen ganz leicht ist, auch der Forderung Genüge zu thun, welche in dem oben gedachten Aufsatze dieses Journals gemacht worden, und welche darin bestand: zu zeigen, dafs, wenn X eine Function von x ist, welche für $x = a$ null wird, und Y eine Function von y, welche für $y = b$ verschwindet, der Werth von X^Y für $x = a$ und $y = b$ der Einheit gleich wird.

Da es hier offenbar gestattet ist, x und y als Functionen einer und derselben dritten Variabeln z zu betrachten, so läfst sich die Forderung etwas einfacher also ausdrücken:

Es soll bewiesen werden, dafs, wenn X und Y irgend zwei Functionen von z sind, deren jede für $z = c$, oder, noch einfacher, für $z = 0$ ebenfalls in Null übergeht, der Werth von X^Y der Einheit gleich wird.

Beweis. Weil für $z = 0$ auch X und Y verschwinden sollen, so kann man

$$X = Pz^m, \quad Y = Qz^n$$

setzen, wo m und n von z unabhängige positive Zahlen, P und Q dagegen zwei Functionen von z sind, die für $z = 0$ nicht null werden, sondern gewisse constante Werthe, sie mögen p und q heifsen, erlangen. Hiermit wird nun

$$X^Y = (P^Q)^{z^n} . (z^m)^{Qz^n}.$$

Der erste Factor auf der rechten Seite des Zeichens geht aber für $z = 0$ über in

$$(p^q)^{0^b} = (p^q)^0 = 1.$$

Was den zweiten Factor anlangt, so setze man $z^n = v$, wo daher v eine mit z zugleich verschwindende Variable ist, und der Factor wird

$$v^{\frac{m}{n}Qv} = (v^v)^{\frac{m}{n}Q}.$$

Da nun für $z = 0$ auch $v = 0$ und damit nach Pfaff $v^v = 1$ wird, so verwandelt sich dieser zweite Factor für $z = 0$ in $1^{\frac{m}{n}Q} = 1$, folglich u. s. w.